

Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire par des modèles extrêmes d'ordre entier

Abdennacer BEN MESSAOUD^{#1}, Samia TALMOUDI BEN AOUN^{**2}, Moufida LAHMARI KSOURI^{#3}

[#] *Université de Tunis El Manar, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, LR11ES20 Laboratoire d'Analyse, de Conception et de Commande des Systèmes (LACS)
1002, Tunis, Tunisie*

¹abdennacer_messa@yahoo.fr

³moufida.ksouri@enit.rnu.tn

^{*} *Université de Carthage, Institut Supérieur de Sciences Appliquées et de Technologie de Mateur
7030, Mateur, Tunisie*

²samia_talmoudi@yahoo.fr

Résumé— Ce travail propose une nouvelle technique de modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire décrits par une fonction de transfert fractionnelle. L'idée de base exploite l'approche multimodèle en déterminant une base des modèles reposant sur les ordres fractionnaires intervenant dans la fonction de transfert fractionnelle initiale. Des simulations et des études comparatives menées sur des exemples académiques montreront l'intérêt de l'approche de modélisation avancée et son avantage par rapport à la modélisation par une fonction de transfert d'ordre fractionnaire unique approximée par un modèle d'ordre entier.

Mots-clés— Systèmes d'ordre fractionnaire, modélisation, approche multimodèle, modèles extrêmes.

I. INTRODUCTION

L'analyse d'une large catégorie de processus physiques tels que le bruit électronique [1], les réseaux de télécommunication [2], la mécanique des fluides [3], la polarisation électrode-électrolyte [4] a montré que les tracés de Bode de ces systèmes sont caractérisés par une pente d'ordre fractionnaire et par un comportement temporel régi par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Ce type de processus est connu comme système d'ordre fractionnaire. A ce jour, ce type de systèmes a été étudié de différents points de vue, tels que l'analyse de stabilité [5], [6], l'identification [7], [8], l'approximation [9], [10] et la commande [11], [12]. Cependant, la modélisation par une fonction d'ordre fractionnaire exige, préalablement, l'approximation de cette dernière. En effet, les fonctions d'ordre fractionnaire sont des fonctions de dimension infinie et par conséquent il est très difficile de les mettre en œuvre pratiquement ou de les simuler numériquement. De même, les outils de calcul et de simulation sont incapables de traiter directement les équations différentielles d'ordre fractionnaire. Plusieurs méthodes d'approximation ont été développées dans la littérature. La plupart d'entre eux sont basées sur l'approximation du système d'ordre fractionnaire par un modèle d'ordre entier.

Un des problèmes majeurs de ces méthodes d'approximation est que les résultats ne sont pas exacts,

fiables ou satisfaisants lorsque le système est approximé par un modèle d'ordre simple, tel que le premier ordre. Et si, par contre, le modèle est d'ordre élevé, sa complexité peut empêcher la compréhension et rend la conception du contrôleur plus difficile.

Pour surmonter le problème de l'ordre élevé obtenu par approximation, certains travaux sur la réduction de dimension du modèle ont été faits [13]. Cependant, étant donné que l'approche de réduction de dimension du modèle se base aussi sur une approximation, une incertitude supplémentaire est introduite dans les résultats. D'où la nécessité d'un outil puissant pour contourner les difficultés de modéliser les systèmes d'ordre fractionnaire.

Dans ce papier, on propose d'exploiter l'approche multimodèle afin d'arriver à un modèle final capable de représenter convenablement les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire dans ses différents domaines de fonctionnement.

Le reste du papier est organisé comme suit : dans la deuxième section, on présente les systèmes d'ordre fractionnaire. L'approche multimodèle est présentée dans la section 3. La nouvelle stratégie de modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire par exploitation de l'approche multimodèle est détaillée dans la section 4. Pour illustrer la précision et l'efficacité de l'approche proposée dans le domaine temporel, les résultats de simulation sont donnés dans la section 5.

II. SYSTÈMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

A. Opérateurs d'ordre fractionnaire

L'opération de dérivation ou d'intégration d'ordre fractionnaire est la généralisation de la dérivation ou intégration classique entière à des ordres quelconques non entiers irrationnels ou complexes [14].

L'opérateur intégral-différentiel continu est défini comme [14] :

$${}_t D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \text{si } Re(\alpha) > 0 \\ 1 & \text{si } Re(\alpha) = 0 \\ \int_{t_0}^t (dt)^{-\alpha} & \text{si } Re(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

où α est l'ordre de l'opération, t_0 et t sont des limites de l'opération et $Re(\alpha)$ est la partie réelle de α . De plus, l'ordre fractionnaire peut être un nombre complexe [10]. Dans ce document, on s'intéresse au cas où l'ordre fractionnaire est un nombre réel ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Les deux définitions les plus fréquemment utilisées sont: définition de Grünwald-Letnikov et définition de Riemann-Liouville.

La définition de Grünward-Letnikov est donnée par [15] :

$${}_t D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad (2)$$

où $\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{t-t_0}{h}$,

et $\binom{\alpha}{k}$ représente le binôme de Newton généralisé à des nombres réels avec :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha - 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)} \quad (3)$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (4)$$

La définition de Riemann-Liouville de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire α est donnée par [16] :

$${}_t D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-x)^{-\alpha-1} f(x) dx & \text{si } \alpha < 0 \\ f(t) & \text{si } \alpha = 0 \\ \begin{cases} D^n [{}_t D_t^{\alpha-n} f(t)] \\ n = \min\{k \in \mathbb{N}, k > \alpha\} \end{cases} & \text{si } \alpha > 0 \end{cases} \quad (5)$$

Les deux définitions sont équivalentes quand $f(t_0) = {}_t D_t^1 f(t_0) = \dots = {}_t D_t^\infty f(t_0) = 0$ [17].

La transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle est donnée par [17], [18] :

$$\mathcal{L}\{{}_t D_t^{-\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (6)$$

avec : $\alpha > 0$.

Et quand $f(0) = {}_0 D_t^1 f(0) = \dots = {}_0 D_t^\infty f(0) = 0$, la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$\mathcal{L}\{{}_0 D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (7)$$

avec : $\alpha > 0$.

Afin d'alléger les notations, nous considérons dans la suite de ce papier que ${}_0 D_t^\alpha = D^\alpha$.

B. Représentation de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Un système linéaire d'ordre fractionnaire peut être décrit comme dans le cas entier par trois modèles.

1) Equation différentielle d'ordre fractionnaire:

L'équation différentielle représentant un système d'ordre fractionnaire s'écrit sous la forme :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (8)$$

où : $a_k, b_k \in \mathbb{R}$; $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système ; et $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}^+$.

2) Fonction de transfert d'ordre fractionnaire:

L'application de la transformée de Laplace à l'équation (8), avec conditions initiales nulles, donne la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (9)$$

3) Représentation d'état de systèmes d'ordre fractionnaire:

Comme dans le cas entier, une représentation d'état d'ordre fractionnaire comporte deux équations [9], [19], [20] :

- une équation d'état d'ordre fractionnaire dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre fractionnaire réel.
- Une équation d'observation identique à celle du cas entier.

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (10)$$

C. Simulation de systèmes d'ordre fractionnaire

La simulation d'un système d'ordre fractionnaire est dans la plupart des cas très compliquée [17], [20]. Plusieurs approches, permettant de simuler les systèmes d'ordre fractionnaire, ont été développées dans la littérature. La plupart d'entre elles sont basées sur l'approximation du système d'ordre fractionnaire par un modèle d'ordre entier. Ces approches consistent à calculer la sortie du système en utilisant un modèle rationnel continu équivalent, obtenu à partir de l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire à l'aide d'un opérateur ou d'une représentation spéciale [21]. La méthode la plus couramment utilisée a été proposée par Oustaloup. Cette méthode repose sur l'approximation en temps continu de l'opérateur d'ordre fractionnaire s^α , par une fonction rationnelle en utilisant une distribution récursive de zéros et pôles d'ordre entier, répartis dans une bande de fréquence limitée.

L'approximation par la méthode d'Oustaloup de l'opérateur fractionnaire s^α sur la bande de fréquence $[\omega_b, \omega_h]$ est donnée par [10]:

$$s^\alpha = K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (11)$$

avec :

$$\omega'_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1-\alpha)}{2N+1}}, \omega_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1+\alpha)}{2N+1}}$$

et $K = \omega_h^\alpha$.

Cette approximation, attrayante par son caractère systématique, peut mener à des systèmes entiers de dimension élevée. Un compromis devra donc être trouvé entre qualité de l'approximation et dimension du système [22].

III. APPROCHE MULTIMODELE

Comme son nom l'indique, un multimodèle fait appel à plusieurs modèles M_i (figure 1) dont la simplicité représente un avantage important de cette approche. Ces modèles constituent ce qu'on appelle « base » ou « bibliothèque » de modèles.

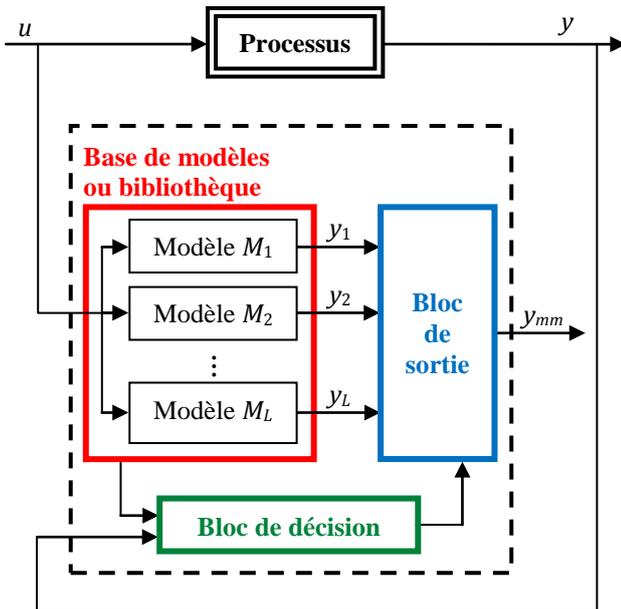


Fig. 1 Modélisation du système par une approche multimodèle

Les modèles M_i n'ont, souvent, rien à voir avec le processus réel envisagé dans sa globalité. Ils peuvent être d'ordres et de structures différents mettant en jeu plusieurs paramètres différents [23].

Chaque élément de la bibliothèque ne peut reproduire le comportement du système que dans un ou quelques domaines de fonctionnement bien particuliers, d'où le rôle du « bloc de décision ». Ce bloc permet d'estimer la pertinence appelée aussi validité v_i de chaque modèle en fonction d'un certain nombre de paramètres. Cette validité doit vérifier la propriété de la somme convexe définie par :

$$\begin{cases} v_i \in [0,1] ; i = 1,2, \dots, L \\ \sum_{i=1}^L v_i = 1 \end{cases} \quad (12)$$

Ces coefficients sont calculés plus couramment par l'approche des résidus formulés par la différence entre la sortie réelle et les sorties des sous-modèles.

Plusieurs approches de calcul des validités ont été proposées dans la littérature [24]-[26]. L'approche des résidus est la plus couramment utilisée. Cette approche se repose sur le calcul, à chaque instant, de l'écart entre la sortie du processus et celles des différents modèles M_i de la base :

$$r_i = |y - y_i| ; i = 1, \dots, L \quad (13)$$

avec y : la sortie du processus et y_i : la sortie du modèle M_i .

Les validités sont déduites à partir de la relation suivante :

$$v_i = 1 - \frac{r_i}{\sum_{j=1}^L r_j} ; i = 1, \dots, L \quad (14)$$

Les validités normalisées, satisfaisant la propriété de somme convexe, sont données par :

$$v_{in} = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^L v_j} ; i = 1, \dots, L \quad (15)$$

A partir des sorties de la bibliothèque de modèles et de celles du bloc de décision, le bloc de sortie a pour fonction de combiner toutes ces informations afin de calculer la sortie multimodèle $y_{mm}(t)$ à chaque instant donnée par :

$$y_{mm}(t) = \sum_{i=1}^L v_i(t) y_i(t) \quad (16)$$

où y_i est la sortie de sous modèle M_i de la bibliothèque de modèles.

IV. PROPOSITION D'UNE NOUVELLE STRATEGIE DE MODELISATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Deux classes de systèmes d'ordre fractionnaire sont considérées dans ce papier :

- Systèmes décrits par la fonction de transfert fondamentale d'ordre fractionnaire définie par Cole-Cole [27] :

$$G(s) = \frac{b}{1 + (\tau_0 s)^\alpha} = \frac{b}{1 + a s^\alpha} \quad (17)$$

avec : $a = (\tau_0)^\alpha$, $b \in \mathbb{R}$, τ_0 est un nombre réel positif et $0 < \alpha < 1$.

- Systèmes décrits par la fonction de transfert d'ordre fractionnaire suivante :

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s^\alpha + a_2 s^\beta} \quad (18)$$

avec : b_0, a_0, a_1 et $a_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ et $1 < \beta < 2$.

En exploitant l'approche multimodèle, la nouvelle technique proposée, de modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire, repose sur l'obtention d'une base des modèles

extrêmes d'ordre entier. Les ordres de ces sous-modèles représentent les entiers limites à gauche et à droite de l'ordre non entier du système.

Reprenons les deux classes de systèmes décrits par les deux fonctions de transfert (17) et (18), deux bases de modèles peuvent être construites :

- Première classe de systèmes:
 Comme $0 < \alpha < 1$, la base de modèles est composée de deux modèles :

$$G_1(s) = \frac{b}{1 + as^0} = \frac{b}{1 + a} \quad (19)$$

et $G_2(s) = \frac{b}{1 + as^1} = \frac{b}{1 + as}$

- Deuxième classe de systèmes:
 Comme $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 2$, la base de modèles est composée de deux modèles :

$$G_1(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1s^0 + a_2s^1} = \frac{b_0}{(a_0 + a_1) + a_2s} \quad (20)$$

et $G_2(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1s^1 + a_2s^2} = \frac{b_0}{a_0 + a_1s + a_2s^2}$

Une fois la base des modèles déterminée, la sortie multimodèle, est obtenue par une combinaison des sorties des modèles locaux pondérés par leurs indices de validité calculés par l'équation (15) :

$$y_{mm}(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t) \quad (21)$$

avec : y_1 et y_2 sont respectivement la sortie de sous-modèles représentée par la fonction de transfert G_1 et la sortie de sous-modèle représentée par la fonction de transfert G_2 ; v_1 et v_2 leurs validités respectives.

V. EXEMPLES DE SIMULATION

Pour illustrer la précision et l'efficacité de l'approche proposée dans le domaine temporel, deux exemples de simulation sont considérés.

A. Exemple 1

Considérons le système d'ordre fractionnaire représenté par la fonction de transfert de Cole-Cole donnée par l'équation suivante avec $\alpha = 0.7$, $b = 1$ et $\tau_0 = 1$ [8], [20]:

$$G(s) = \frac{1}{1 + s^{0.7}} \quad (22)$$

En appliquant l'approche de modélisation proposée, deux modèles constituent la base de modèles. Leurs fonctions de transfert respectives sont données par :

$$G_1(s) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad G_2(s) = \frac{1}{1 + s} \quad (23)$$

En appliquant un échelon unitaire en entrée, la sortie multimodèle est obtenue par fusion entre les sorties de deux sous-modèles pondérées par leurs validités respectives (estimées par l'approche des résidus).

La figure 2 présente les évolutions des sorties respectives multimodèle et système d'ordre fractionnaire. Cette figure montre clairement que la sortie obtenue par la technique proposée suit correctement la sortie du système. Ceci est prouvé, aussi, par la figure 3 qui présente l'évolution de l'erreur absolue donnée par :

$$er(t) = |y(t) - y_{mm}(t)| \quad (24)$$

avec : y est la sortie du système et y_{mm} est la sortie multimodèle.

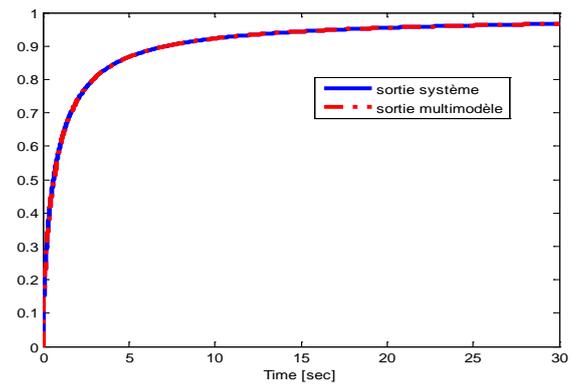


Fig. 2 Evolution des sorties système et multimodèle

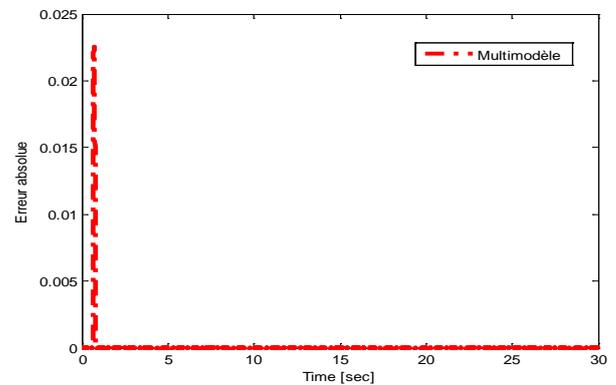


Fig. 3 Evolution des erreurs absolues entre la sortie du système et la sortie multimodèle

Pour monter l'efficacité de la nouvelle technique, pour la modélisation d'un système d'ordre fractionnaire, par rapport à la modélisation par fonction d'ordre fractionnaire qui exige l'approximation de cette dernière, une comparaison a été faite en appliquant la méthode d'Oustaloup comme approche d'approximation (cf. paragraphe II-C). L'opérateur fractionnaire $s^{0.7}$ est approximé sur la bande de fréquence $[10^{-2}, 10^4]$ avec $N = 6$.

Les résultats de simulation sont donnés sur les figures 4 et 5. Ces figures montrent que la nouvelle technique de modélisation offre une précision très satisfaisante meilleure que les résultats fournis par la technique de modélisation par fonction d'ordre fractionnaire.

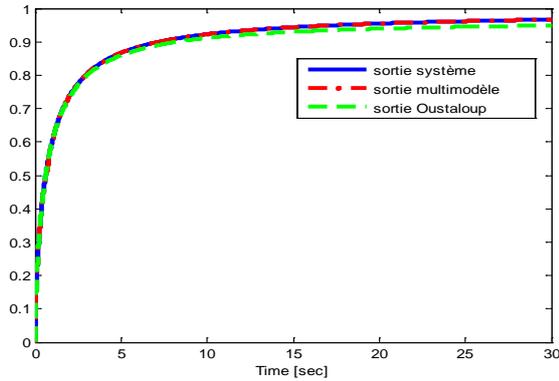


Fig. 4 Evolution des sorties système, multimodèle et Oustaloup

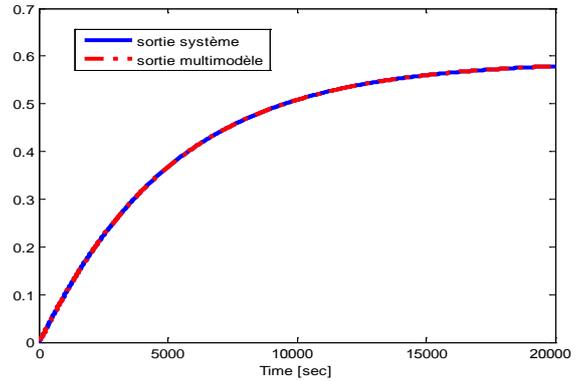


Fig. 6 Evolution des sorties système et multimodèle

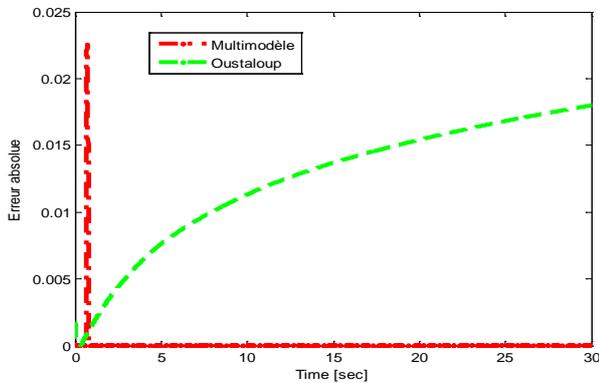


Fig. 5 Evolutions des erreurs absolues entre les sorties

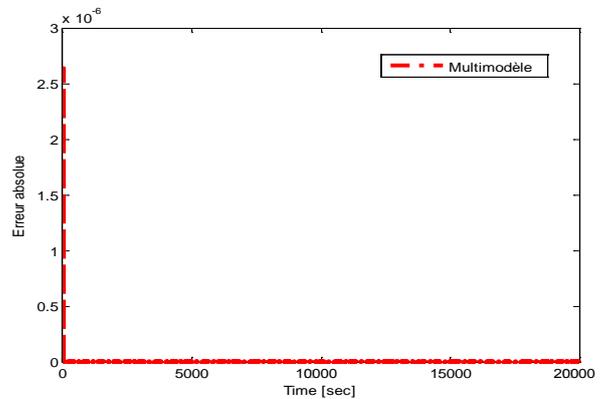


Fig. 7 Erreur absolue entre la sortie du système et la sortie multimodèle

B. Exemple 2

L'approche proposée a été aussi appliquée sur le modèle dynamique fractionnaire, d'un four de chauffage, représenté par la fonction de transfert suivante [28]:

$$G(s) = \frac{1}{1.69 + 6009.5s^{0.97} + 14994s^{1.31}} \quad (25)$$

Les deux modèles constituent la base de modèles sont données par :

$$G_1(s) = \frac{1}{6011.19 + 14994s} \quad (26)$$

et $G_2(s) = \frac{1}{1.69 + 6009.5s + 14994s^2}$

L'évolution de la sortie multimodèle, en appliquant un échelon unitaire à l'entrée, est présentée par la figure 6. Cette figure montre que l'implémentation de l'approche proposée offre une bonne modélisation du système considéré. En effet, la sortie multimodèle suit la sortie du système avec une très faible erreur comme le montre la figure 7.

En comparant les résultats obtenus en appliquant la technique de modélisation proposée, par rapport à celle exploitant l'approximation d'Oustaloup (cf. paragraphe II-C) sur la bande de fréquence $[10^{-6}, 10^6]$ avec $N = 8$, on remarque que la première a donné des résultats meilleurs. Cela paraît clair sur les figures 8 et 9.

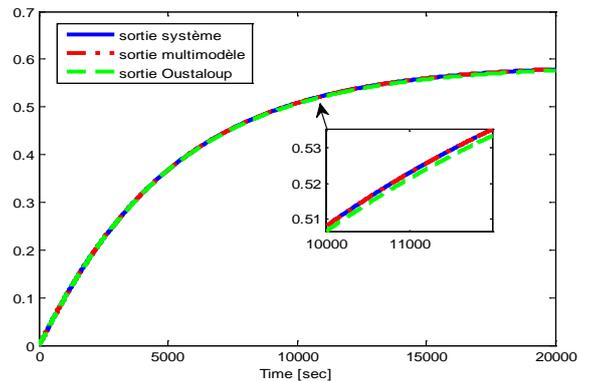


Fig. 8 Evolution des sorties système, multimodèle et Oustaloup

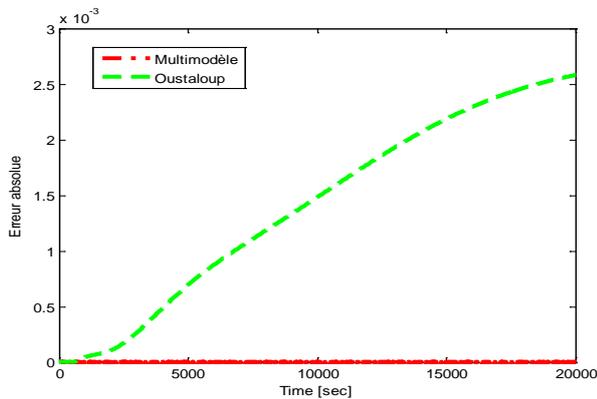


Fig. 9 Evolutions des erreurs absolues entre les sorties

VI. CONCLUSION

Ce travail présente une nouvelle approche de modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire. Cette approche fournit une représentation multimodèle modélisant la dynamique du système fractionnaire par des modèles d'ordre entier. En effet, la base de modèles est constituée par des modèles extrêmes dont les ordres représentent les entiers limites encadrant à gauche et à droite l'ordre non entier du système initial. Les résultats des simulations prouvent l'efficacité de l'approche de modélisation proposée.

Une étude comparative menée sur les résultats donnés par la modélisation par une fonction d'ordre fractionnaire approximée par un modèle d'ordre entier (méthode d'approximation d'Oustaloup) et celles donnés par l'implémentation de l'approche proposée, a montrée que cette dernière offre de meilleurs résultats en terme de précision.

REFERENCES

[1] A. van der Ziel, "Unified presentation of 1/f noise in electronic devices: fundamental 1/f noise sources," *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, pp. 233–258, Mars 1988.

[2] W. Willinger, M. S. Taqqu, W. E. Leland, et D. V. Wilson, "Self-similarity in high-speed packed traffic: analysis and modeling of Ethernet traffic measurements," *Statistical Science*, vol. 10, pp. 67–85, Fév.1995.

[3] A. Scotti, C. Meneveau, et S. G. Saddoughi, "Fractal dimension of velocity signals in high-reynoldsnumbers hydrodynamic turbulence", *Physical Review E*, vol. 51, pp. 5594–5608, Jan.1995.

[4] H. H. Sun, et B. Onaral, "A unified approach to represent metal electrode polarization," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-31, pp. 399-406, Juillet 1983.

[5] C. Bonnet, et J. R. Partington, "Copriime factorizations and stability of fractional differential systems," *Systems & Control Letters*, vol. 41, pp. 167–174, Oct. 2000.

[6] J. Sabatier, M. Moze, et C. Farges, "LMI stability conditions for fractional order systems," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, pp. 1594–1609, Mars 2010.

[7] T. Poinot, et J. C. Trigeassou, "Identification of fractional systems using an output-error technique," *Nonlinear Dynamics*, vol.38, pp. 133–154, Mars 2004.

[8] S. Zhou, J. Cao, et Y. Chen, "Genetic Algorithm-Based Identification of Fractional-Order Systems," *Entropy*, 15, 1624–1642, Mai 2013.

[9] A. Oustaloup, *La dérivation non entière: théorie, synthèse et applications*, Hermès, Paris, 1995.

[10] D. Xue, C. Zhao, et Y. Chen, "A modified approximation method of fractional order system," *Proc. IEEE ICMA*, 2006, pp 1043-1048.

[11] T. T. Hartley, et C. F. Lorenzo, "Dynamics and control of initialized fractional order systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, pp. 201–233, Juillet 2002.

[12] A. Rhouma, F. Bouani, B. Bouzouita, et M. Ksouri, "Model Predictive Control of Fractional Order Systems," *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 9, Fév. 2014.

[13] W. Krajewski, et U. Viaro, "A method for the integer-order approximation of fractional-order systems," *Journal of Franklin Institute*, vol. 351, pp. 555–564, Jan. 2014.

[14] N. Hassene, "Contribution à l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire," Thèse de doctorat, Univ. Constantine 1, Algérie, Déc. 2013.

[15] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[16] K. S. Miller, et B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, A Wiley-Interscience Publication, 1993.

[17] M. Aoun, R. Malti, F. Levron, et A. Oustaloup, "Numerical simulations of fractional systems," *Porc. DECT'03*, 2003.

[18] K. B. Oldham, et J. Spanier, *The fractional calculus*, Academic perss, London, 1974.

[19] O. Cois, A. Oustaloup, T. Poinot, et J. L. Battaglia, "Fractional state variable filter for system identification by fractional model," *ECC'01*, 2001.

[20] A. Djouambi, "Contribution à la commande CRONE," Thèse de doctorat, Univ. Mentouri de Constantine, Algérie, 2008.

[21] T. Poinot, et J. C. Trigeassou, "A method for modelling and simulation of fractional systems," *Signal Processing*, vol. 83, pp. 2319 – 2333, Nov. 2003.

[22] M. Moze, "Commande CRONE des systèmes linéaires à paramètres variants," Thèse de doctorat, Univ. Bordeaux 1, France, 2007.

[23] H. Gharsallaoui, "Reconfiguration de lois de commande et accommodation active des modes de fonctionnement pour les systèmes plats," Thèse de doctorat, Ecole nationale d'ingénieurs de Tunis, Tunisie, 2010.

[24] F. Delmotte, "Analyse multi-modèle," Thèse de doctorat, Univ. des sciences et techniques de Lille, France, 1997.

[25] M. Ksouri-Lahmari, "Contributions à la commande multimodèle des processus complexes," Thèse de doctorat, Univ. des sciences et techniques de Lille, France, 1999.

[26] S. Talmoudi, K. Abderrahim, R. Ben Abdennour et M. Ksouri, "A New Technique of Validities' Computation for Models' base," *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, vol. 2, pp. 680-685, Oct. 2003.

[27] K. S. Cole, et R. H. Cole, "Dispersion and absorption in dielectrics, alternating current characteristics," *Journal of Chemical Physics*, vol. 9, pp. 341-351, Avril 1941.

[28] I. Podlubny, L. Dorcak, et I. Kostial, "On Fractional Derivatives, Fractional-Order Dynamic Systems and PID μ -controllers," *Proc. IEEE CDC'97*, 1997, pp. 4985-4990.